Ein generisches Programm für inklusionsminimale Teilmengen

Rudolf Berghammer

Institut für Informatik und Praktische Mathematik
Christian-Albrechts-Universität Kiel
Olshausenstraße 40, D-24098 Kiel

Neben der Berechnung von anzahlminimalen bzw. -maximalen Teilmengen eines gegebenen Universums U spielt auch die Berechnung von inklusionsminimalen bzw. -maximalen Teilmengen von U eine große Rolle bei Optimierungsproblemen. Einerseits fragt ein Problem oft direkt nach inklusionsminimalen bzw. -maximalen Teilmengen, wie etwa im Fall der spannenden Wälder oder Knotenbasen von Graphen. Weiterhin werden solche Teilmengen aber auch gerne als Startpunkte zur Berechnung von anzahlminimalen bzw. -maximalen Teilmengen verwendet, um letztere zu beschleunigen. Hierzu ist die Bestimmung von anzahlmaximalen Matchings in Graphen ein gutes Beispiel, wo man zuerst sehr einfach und effizient ein inklusionsmaximales Matching berechnet und erst anschließend den relativ aufwendigen Prozeß der iterativen Suche nach vergrößernden alternierenden Ketten startet. Schließlich werden inklusionsminimale bzw. -maximale Teilmengen auch als Approximationen verwendet, wenn eine Berechnung von entsprechenden anzahlminimalen bzw. -maximalen Teilmengen aus komplexitätstheoretischen Gründen effizient nicht möglich zu sein scheint, wie etwa bei den transitiven Reduktionen von Graphen.

In dem Vortrag beschränken wir uns auf die Berechnung von inklusionsminimalen Teilmengen. Wir entwickeln zuerst formal mittels der Invariantentechnik ein generisches Programm, das zu einem Universum U, einem Element $X \in 2^U$ und einem nach oben abgeschlossenen Prädikat $\mathcal{P}$ auf 2^U eine inklusionsminimale Teilmenge von

$$\{ Y \in 2^U : Y \subseteq X \wedge \mathcal{P}(Y) \}$$

bestimmt. Dann betrachten wir zwei Verfeinerungen, die es in vielen Fällen erlauben, die Effizienz einer konkreten Instantiierung entscheidend zu verbessern. Schließlich demonstrieren wir die Anwendung der beiden Verfeinerungsschritte am Problem der Approximation einer anzahlminimalen Knotenüberdeckung eines Graphen und vergleichen das Resultat mit dem gängigsten aus der Literatur bekannten Verfahren. Dabei verwenden wir zusätzlich Relationenalgebra als algebraischen Rahmen für graphentheoretische Problemstellungen.